KROKOVÁNÍ A SCHODY

rozbor didaktických prostředí

Proč Krokování a Schody?

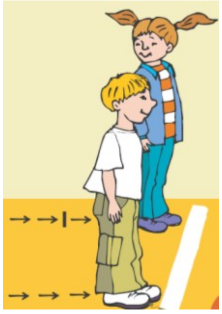
Porozumění číslu, které je jedním z prvních objektů tvořícího se světa matematiky dítěte předškolního a raně školního věku, je budováno v úzké vazbě na životní zkušenosti žáka. Například slovo pět má pro dítě smysl jen tenkrát, když je sémanticky ukotveno, např. pět jablek, páté podlaží, o pět bonbónů více. Toto jsou tři základní **typy sémantického ukotvení čísla**, jež nazýváme **stav** (S), **adresa** (A) a **operátor** (O).

Školská a předškolská matematika buduje představy dětí o čísle převážně na základě práce s číslem jako stavem. Číslo jako operátor se vyskytuje zřídka a číslo jako adresa ještě řidčeji. Tato ukotvení se obecně považují za příliš náročná. V našich experimentech se ukázalo, že jak číslo jako adresa, tak číslo jako operátor jsou šestiletému dítěti dobře dostupné, jestliže tento typ čísla zavádíme ve shodě s jeho životní zkušeností. Výukové prostředí, ve kterém se silně rozvíjí porozumění číslu jako operátoru, nazýváme **Krokování**, a číslu jako adrese, nazýváme **Schody**.

Běžné vyučování se zaměřuje na nácvik spojů typu $2 + 3 = 5$, resp. $5 - 3 = 2$ s cílem operaci sčítání jednomístných čísel co nejlépe zautomatizovat. Tohoto cíle se dosahuje především drilováním velkého množství „sloupečků" a jejich grafických obměn v různých kontextech. Dále se žákům nabízejí mnohé slovní úlohy, v nichž se nacvičené spoje využívají. Velkou variabilitu kontextů slovních úloh je možné různě třídit a klasifikovat. Jejich tříděním a klasifikací se zabývalo mnoho jak zahraničních, tak i domácích autorů. Náš přístup k třídění úloh vychází z klasifikace čísel podle jejich sémantického určení, tedy **počet**, **veličina** a **skalár**. Úlohy typu $S_1 \pm S_2 = S_3$, kde všechna tři čísla jsou stavy, a typu $S_1 \pm O = S_2$, kde jedno číslo je operátor, se vyskytují v našich běžných učebnicích nejčastěji. Úlohy typu $O_1 \pm O_2 = O_3$, kde všechna tři čísla jsou operátory, jsou zanedbávány nejčastěji. Důsledkem toho bývají značné potíže žáků ve vyšších ročnících při řešení úloh, kde hraje roli čas, a úloh o pohybu. Právě tyto úlohy a úlohy typu $A_1 \pm O = A_2$ jsou podstatou prostředí Krokování a Schody.

Otevírat dětem svět aritmetiky prostřednictvím výukového prostředí Krokování lze již od předškolního věku. Spolu s prostředím Schody jsou východiskem pro **procesuální porozumění** základních pojmů aritmetiky jako **kladné** a později i **záporné číslo**, **číselné operace**, **číselná osa** a některým dalším pojmům jako **rovnice** a **absolutní hodnota**. Dále tato prostředí významně přispívají k rozvoji schopností organizace souboru dat a orientace v nich, transferu jednoho jazyka do druhého a k rozvoji řešitelských strategií žáka.

Etapizace Krokování stručně



(Takto vypadají ilustrace k prostředí v učebnicích nakladatelství Fraus, ze kterých jsou i další ilustrační obrázky.)

Úvodní etapa – Pohyb a nácvik povelů (první ročník)

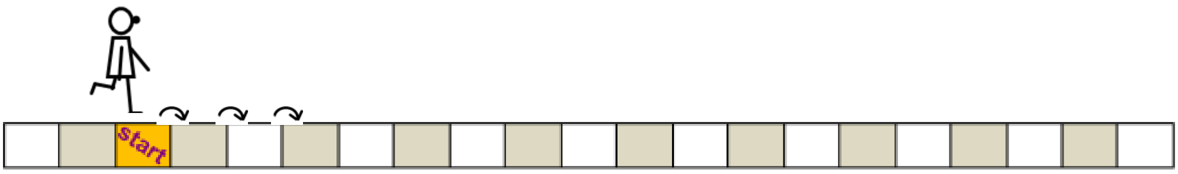
Prostředí využívá přirozeného rytmického pohybu chůze. Nejprve učitel sám předvede žákům krokování, vysloví například pokyn: *Čtyři kroky, začni, teď!* Učitel udělá čtyři kroky a počítá do rytmu *jeden, dva, tři, čtyři*. Pak se žáci přidají a počítají s učitelem a posléze i sami krokují a tleskají do rytmu chůze. V této etapě krokování se propojují čísla (jejich akustická podoba), rytmus zvukový (počítání, tleskání, odříkávání říkanky) a rytmus pohybový (krokování a tleskání). Tento synchron rytmů hraje klíčovou roli pro zvládnutí algoritmu počítání a je základem aritmetického myšlení.

Při krokování žák poznává **sémantický model čísla**. Číslo je reprezentováno počtem kroků, tedy je to **kvantita**. Krokování je pohyb, tedy model čísla je **procesuální**. Pohyb vede k nějaké změně, tedy číslo má roli **operátoru změny**. Jakmile žák podle pokynu odkrokuje, percepce (akustická, vizuální, kinestetická) počtu kroků pomine, proto je to model čísla **pomíjivý**. Bude-li žák o situaci komunikovat, musí si uložit představu o ní do paměti. Jedná se zde tedy také o trénink **krátkodobé paměti**. I ta je v matematice velmi důležitá, například při pamětném počítání i při písemných algoritmech početních operacích.

První etapa – vícedílné povely a standardizace délky kroků (první ročník)

Učitel určí dva žáky, Adama a Evu, a postaví je vedle sebe. Dává jim dvoudílný povel: *Adame, udělej tři kroky, pak dva kroky, začni, teď!* Třída počítá, tleská a Adam krokuje. Nyní se učitel zeptá třídy: *Jaký povel máme dát Evě, aby opět stála vedle Adama?* Odpověď žáků je: *Evo, udělej pět kroků, začni, teď!*

Žáci v činnosti žáci poznávají aditivní operace. V této etapě je také standardizována délka kroků, to je vyvoláno většinou potřebou u těch žáků, z nichž někteří dělají velké kroky a někteří malé kroky. Žáci se pak ptají učitelé, jak dlouhé kroky se mají dělat. Učitel na podlahu nakreslí posloupnost značek tak, že mezi vždy mezi dvěma sousedními značkami je stejná vzdálenost jednoho kroku. Vzdálenost značek musí být dostatečně malá na to, aby byli žáci schopni podle nich krokovat i pozpátku.



Druhá etapa – krokování dozadu a záporné číslo (první ročník)

Krokování rozšíříme o kroky pozpátku. Žáci dostávají povely: *Tři kroky dopředu, dva kroky dozadu, začni, teď*. Jestliže jeden žák dostane povel: *Dva kroky dopředu, tři kroky dozadu, začni, teď!*, druhý žák musí krokovat: *jeden krok dozadu*, aby se dostal na stejnou úroveň jako žák první. Je zřejmé, že se zde žáci setkávají se **sémantickým modelem záporného čísla**. Jeden krok dozadu je reprezentací čísla -1, o němž se žáci budou učit až za jeden či dva roky.

Třetí etapa – zápis (první ročník)

Počet povelů přibývá tak, že je již není možné uchopit pamětí. Tak vznikne potřeba záznamu. V diskusi třídy se dospěje k zápisu šipkovému. Tak například dvoudílný povel: *Udělej tři kroky dopředu, pak dva kroky dozadu, začni, teď!* zapíšeme takto: |→→→ | ←←| . Dochází zde k přechodu od dramatizace situace k jejímu znakovému záznamu. Ilustrace úloh: Vydej pokyn a krokuj. |→→|→|, |→|←←←|→|, |→→→|←←|→|←←|

Čtvrtá etapa – propedeutika rovnic (druhý ročník)

Adam a Eva stojí vedle sebe. Učitel velí: *Evo, čtyři kroky dopředu, začni teď!* Eva odkrokuje. Učitel pak dává první díl povelu: *Adame, tři kroky dopředu, …* a gestem naznačí, aby třída doplnila druhý díl povelu. Situaci přepíšeme do šipkového zápisu:

|→→→→| = |→→→| ?|.

„Krokové rovnice“ se stávají náročnější a náročnější, například: *Evo, dva kroky dozadu, čtyři kroky dopředu, tři kroky dozadu a jeden krok dozadu, začni teď!* Pak následuje druhý neukončený povel: *Adame, tři kroky dopředu, dva dozadu,….!* a žáci doplní: *tři kroky dozadu.*

Ilustrace úloh: Aleš a Blanka stojí vedle sebe. Aleš odkrokuje podle zápisu. Kolik kroků musí udělat Blanka, aby děti opět stály vedle sebe? Krokováním vyřeš a doplň šipky do zápisu.

Aleš: |→→|←|→| Blanka: |____________|

Aleš: |←←|→→→|→| Blanka: |____________|

Dále žáci řeší rovnice zapsané šipkami, např. Vyřeš a krokuj.

|→→|←←←|→→| = | |

|→→→|←←| = | |←|

|←|→→|←←| = | |

|→→→| = |→| |

Pátá etapa – šipkové rovnice o dvou neznámých (druhý

ročník)

Žáci řeší šipkové rovnice, například:

←← | ? = ? | →. Použij právě tři šipky; najdi všechna řešení.

Jedná se již o soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Standardním aritmetickým zápisem šipkovou rovnici zapíšeme takto: -2 + x = y + 1 a $|x|$ + $|y|$ = 3. Je zřejmé, že při řešení těchto úloh se jedná o **propedeutiku absolutní hodnoty**. Další ilustrace úloh tohoto typu:

V každé úloze použij pouze dvě šipky. Najdi tři různá řešení.

→→→ □	=	→ □		→→ □ ←	=	→ ←← □
→→→ □	=	→ □		→→ □ ←	=	→ ←← □
→→→ □	=	→ □		→→ □ ←	=	→ ←← □

Šestá etapa – číselný zápis (třetí ročník)

Úlohu zapsanou šipkami zapiš čísly a vyřeš. Ověř krokováním.

→→ = → ←← □ →→→→ Zápis čísly: 2 = 1 – 2 □ +4

Šipkový zápis propojujeme na zápis číselný průběžně. Nyní je to však důležité, kvůli následující etapě. Ilustrace úloh tohoto typu:

Úlohu vyjádřenou šipkami přepiš do sešitu a vyřeš ji. Výpočet ověř krokováním. Pak převeď šipkový zápis na číselný:

a) →→→ □ ← = →

b) →→ ←←← □ = →→

c) →→ □ ← = →

d) ← □ →→ = →→

Úlohu vyjádřenou čísly přepiš do sešitu a převeď ji na šipkový zápis. Obě úlohy vyřeš. Výpočet ověř krokováním.

3 □ = 5 4 □ = 1 1 □ + 2 = 1 –2 □ = 1

Sedmá etapa – čelem vzad (třetí ročník)

Číselný zápis 4 – (3 – 1) přepíšeme do šipkového zápisu takto: →→→→ ↺ →→→ ← ↺

Tomu odpovídá slovní povel: *Udělej čtyři kroky dopředu, čelem vzad, tři kroky dopředu, jeden dozadu, čelem vzad*. Zjednodušený povel pro druhého žáka je: *Udělej dva kroky dopředu, …*

Povel *čelem vzad* názorně vysvětlí **mínus před závorkou**.

Ilustrace úloh tohoto typu z učebnice pro 5. ročník.

Vyřeš a přepiš do čísel.

a) |→→|←←| |→| = |→→→| b) |→→|ↄ|←|→→|ↄ|→→| = | |

c) |→→|ↄ|→→| |ↄ|→→| = |→→→| |

Touto etapou víceméně končí prostředí Krokování na úrovni prvního stupně. Zde uvedeme několik úloh z učebnice pro 6. ročník, aby bylo zřejmé, jak se s tímto prostředím bude pokračovat na 2. stupni ZŠ.

Vyslovte pokyn, obsahující pouze jedno číslo, který dáte Alešovi, aby stál opět vedle Báry. Pokyn zapište instrukcí. Symbol ح znamená čelem vzad.

Celé představení je možné zapsat jako rovnost instrukcí:

|→→|ح|→|←←|ح| = |→→→|

Zjednodušte šipkové instrukce. Správnost ověřte krokováním.

a) |→→→|ح|→→|←|ح|, b) |→|ح|→→→|←←|ح|,

c) |←←|ح|←←|→→→→|ح|, d) |→→|ح|←←←|←|ح|

Do šedivého pole doplňte šipky tak, aby rovnost platila. Ověřte

krokováním.

a) | |⊃|→→|←←←←|⊃| = |→→→|,
b) |→→|⊃| |→|⊃| = |←←|,
c) |←|⊃|→→→| |⊃| = |→|,
d) |→→|⊃|←| |⊃| = |→→→|.

Řešte rovnice pomocí krokování.

a) x – (-1 + 2) = 5, b) 3 – (x + 1) = -2, c) -2 – (-1 + x) = -1.

d) 1- (x) + 2 = 4 e) 7 – (-1 + x) = -5, f) x – (-5 + 2) = 10.

Osmá etapa – pravděpodobnost v prostředí Krokování

Krokování lze využít k budování **propedeutiky pravděpodobnostního myšlení**. Počet kroků je určen hrací kostkou, nebo číslem tahaným z klobouku. Například pětice žáků závodí na trase dlouhé 8-12 kroků. První žák hodí hrací kostkou, řekne číslo, které padlo, a udělá příslušný počet kroků. Pak následují další žáci. Kdo je první v cíli? Popsaná hra je hazardní hrou. Později přibudou sofistikovanější hry, v nichž si hráč vytváří pravděpodobností intuici a tu pak může využít ke zvýšení nadějí na výhru. Jednu z těchto her uvedeme.

<u>Hra Fáborky.</u> Žák dostane čtyři fáborky a ty položí na čtyři značky krokovacího jeviště. Například na značky vzdálené od začátku jeviště o 2 kroky, 5 kroků, 8 kroků a 12 kroků. Pak se žák postaví na začátek krokovacího jeviště a hodí dvěma kostkami. Součet ok, které na kostkách padnou, odkrokuje. Například, když padne 2 a 6, odkrokuje 8 kroků. Má-li na značce, ke které došel, fáborek, získává bod. Nemá-li, nezíská nic. Podle prostorových možností třídy může hrát najednou

více žáků. I kdyby se celá třída vystřídala až po třech dnech, je důležité, aby každý žák měl aspoň tři pokusy s možností položit v každém pokusu svoje fáborky nanovo.

Když s tím žáci nepřijdou sami, navrhne učitel zapisovat jednotlivé výsledky soutěžících do tabulky. K tomu účelu je nutné jednotlivé značky pojmenovat. Jestliže žáci zvolí k pojmenování čísla, učitel tuto nabídku přijme a celá hra se de facto odehrává v prostředí Schody – viz dále. V opačném případě, což je málo pravděpodobné, budou jednotlivé značky označeny různými ikonkami, popřípadě jmény, barvami, zvířaty apod. Tabulová evidence ukáže, že některé výsledky se objevují častěji a jiné jsou řidší. Žáky toto poznání vede ke kladení fáborků k často frekventovaným značkám. Ti žáci, kteří tak činí, mají již vytvořený první klastr budoucího schématu pravděpodobnosti výsledku v jevu „hod dvěma kostkami“.

Další úlohy pro 2. a 3. stupeň škol

Rovnice dvoubarevné. Dalším prvkem, jímž můžeme obohatit prostředí šipkových rovnic, je barva. Budeme tedy pracovat ne se dvěma, ale čtyřmi typy šipek: „→“, „←“ barva bílá a „→“, „←“ barva šedá. Podobně i otazníky budou „bílé“ („?“) a šedé („?“). Řešitel místo bílého otazníku dává bílé šipky, místo šedého otazníku šedé šipky. Uvedená rovnost pak představuje dvě rovnosti, jednu pro bílou barvu, druhou pro šedou barvu. Jinak řečeno jedná se o vektorovou rovnici ve dvourozměrném vektorovém prostoru. První souřadnice odpovídá bílé barvě, druhá šedé barvě. Zde již nebudeme šipkový zápis převádět do povelů, i když by to možné bylo. Ilustrace úloh:

a) Řešte rovnici | →→ | ? | → | ? | = | →→→ | →→→→ |

b) Řešte rovnici | ? | →→ | →→→→→ | = | →→→→→→ | →→→ | ? |

Zavedení dvoubarevných šipek je již silnou **propedeutikou pro dvoudimenzní vektorový prostor**. Obě úlohy můžeme přepsat do konvečního zápisu vektorových rovnic:

Ad úloha a) (2 + x, 1 + y) = (3, 4), případně ve vektorovém tvaru: (2, 1) + (x, y) = (3, 4), kdy do prvního „vektoru“ vkládáme známé a do druhého neznámé.

Ad úloha b) (x + 2, 5) = (6, 3 + y), případně ve vektorovém tvaru: (2, 5) + (x, 0) = (6, 3) + (0, y). Uvedený přepis rovnic do tradičního zápisu naznačuje, že by bylo možné uvážit již na prvním stupni ZŠ a mluvit o dvojicích (a, b) jako o vektorech. Domníváme se ale, že tento krok by byl hodně předčasný. Změna jazyka šipek na čísla je přetržením mostu mezi zápisem a sémantickými představami pochodujícího figuranta. Konečně připomeňme některé experimenty množinového období, kdy podobné pokusy byly dělány. A i když žáci kalkulativně operace s vektory zvládli, smysl této činnosti neviděli.

Reprezentace dvoubarevných rovnic v kinematické geometrii roviny. Dvoubarevné rovnice můžeme transformovat na rovnice „dvousměrové“. Místo bílých šipek necháme původní černé šipky a místo šedých šipek doprava/doleva zvolíme černé šipky nahoru/dolu. Bílý otazník transformujeme na podtržený otazník a šedý otazník transformujeme na znak „|?“. Jinak řečeno zobrazujeme situaci vektorové rovnice v rovině pomocí Descartových souřadnic. Úlohy a) a b) výše uvedené budou transformovány na:

<u>Úloha aa).</u> Řešte rovnici | →→ | $\underline{?}$ | ↑↑ | \|? | = | →→→ | ↑↑↑↑ |

<u>Úloha bb).</u> Řešte rovnici | $\underline{?}$ | →→ | ↑↑↑↑↑ | = | →→→→→→ | ↑↑↑ | \|? |

Při zavádění komplexních čísel jsou reálná čísla obohacena o další dimenzi. Použijeme-li příměr, že reálná čísla jsou bílá, nová nereálná jsou šedá, je výše popsaná transformace **propedeutikou ke konstrukci Gaussovy roviny**.

Vektorové rovnice ve vícerozměrných prostorech. Použití barev na přechod od číselných rovnic k vektorovým rovnicím můžeme rozšířit o další barvy, které budou představovat další souřadnice ve vektorových rovnicích. Takovým způsobem lze formulovat **vektorové rovnice ve tří-, čtyř- a vícerozměrných prostorech**.

Schody stručně

Prostředí Schody také využívá přirozeného pohybu chůze, ale po schodech, které jsou očíslovány. Je zde tedy připravován pojem **číselná osa**. V prostředí třídy bývají schody nahrazeny značkami na zemi – tzv. krokovacím pásem, čímž je zároveň standardizována délka kroků, např.:

Učitel dává žákovi Adamovi povel: *Adame, postav se na schod číslo dva, udělej tři kroky, začni, teď!* Třída počítá *jeden, dva*, tleská a Adam krokuje. Nyní se učitel zeptá třídy: *Na jaký schod se Adam dostal?* Odpověď žáků je: *Na pátý.*

Žáci poznávají aditivní triádu 2 + 3 = 5. Poznávají zde číslo (2 a 5) v nové roli, a sice jako **identifikátor** schodu, tedy je to číslo jako **adresa**. To je model **konceptuální**. Počet kroků je opět operátor změny.

Samozřejmě, že po schodech můžeme krokovat i dozadu: *Adame, postav se na schod číslo dvě, udělej tři kroky dozadu, začni, teď!* Třída počítá *jeden, dva*, tleská a Adam krokuje. Nyní se učitel zeptá třídy: *Na jaký schod se Adam dostal?* Nyní záleží na tom, jak učitel připraví krokovací pás. Odpověď žáků může být: *Na červenou jedničku.*

Toto prostředí je učitelům dobře známo a úlohy v něm vytvořené je možné najít i v tradičních učebnicích. Jedná se o všechny úlohy, které se odehrávají na sémantizované číselné ose. Například úlohy o vícepodlažních domech, o teploměru, o výtahu apod. To, oč nám nyní půjde, je ukázat prolnutí prostředí Schody s prostředím Krokování a naznačit některé netradiční problémové situace spojené s prostředím Schody.

K prvnímu setkání žáka s tímto prostředím dochází poté, co byl zaveden jazyk šipek. Ke značkám, které na podlaze určují délku kroku, jsou připsána čísla 0, 1, 2, atd., které prezentujeme jako čísla schodů na pomyslném schodišti. Výchozí sémantická situace odpovídající triádě (2, 3, 5), tj. spoj 2 + 3 = 5, zní: Adam stojí na schodě číslo 2. Vystoupá 3 schody nahoru a dojde na schod číslo 5. Formálně budeme toto představení zapisovat: $\boxed{2}\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{5}$. Na rozdíl od předchozí situace u krokování, kde k představení triády bylo zapotřebí dvou žáků, zde stačí jeden žák. Navíc zde žádná virtuální čísla nejsou, protože jak výchozí schod, tak i konečný schod jsou pojmenovány čísly. Navíc pomíjivost tohoto představení není tak ostrá, jak tomu bylo u Krokování. Tato situace je tedy pro žáky srozumitelnější, a proto je možné v tomto prostředí formulovat náročnější úlohy poměrně brzo. Následující série úloh ukazuje na paletu možností, které prostředí Schody nabízí.

<u>Úloha 1.</u> Místo otazníku dopiš do daného boxu a) číslo $\boxed{3}\boxed{\rightarrow\rightarrow}\boxed{?}$, b) šipky $\boxed{3}\boxed{?}\boxed{5}$,

c) číslo $\boxed{?}\boxed{\rightarrow\rightarrow}\boxed{5}$.

Jestliže přepíšeme úlohu 5 do konvečního zápisu, dostaneme rovnici a) 3 + 2 = ?, b 3 + ? = 5, c) ? + 2 = 5.

<u>Úloha 2.</u> Místo otazníku dopiš do daného boxu a) číslo $\boxed{2}\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{\leftarrow}\boxed{?}$, b) šipky $\boxed{4}\boxed{\leftarrow\leftarrow}\boxed{?}\boxed{5}$, c) šipky $\boxed{2}\boxed{\leftarrow\leftarrow\leftarrow}\boxed{?}\boxed{4}$, d) šipky $\boxed{1}\boxed{?}\boxed{\rightarrow\rightarrow\rightarrow}\boxed{2}$.

Jestliže přepíšeme úlohu 6 do konvečního zápisu, dostaneme rovnici a) 2 + 3 – 1 = ?, b) 4 – 2 + ? = 5, c) 2 – 3 + ? = 4, d) 1 + ? + 3 = 2.

U úlohy c) dojde k situaci, že figurant se dostává o jeden schod pod schod nula. Zatím je tento schod beze jména, což žákům vadit nemusí, protože prostředí Krokování se celé odehrávalo na značkách beze jména. Najít otazník není pro žáky žádný problém. Aby se dostali na schod s číslem

4, musí udělat 5 kroků nahoru. Ještě trochu záludnější je úloha d), ve které je právě neznámé číslo reprezentováno dvojicí kroků dozadu a vede na schod beze jména. V našich experimentech se běžně našel žák, který tomuto schodu dával jméno „mínus jedna“. Někdy takový žák argumentoval použitím kalkulačky. Učitel tento objev nepodporoval, ale později soukromě projevil o žákův nápad zájem.

Ilustrace úloh v prostředí Schody ve 4. ročníku

Hurvínek se Spejblem hrávají hru na chození po schodech. Dnes Hurvínka napadlo řešení: *Taťuldo, ty budeš dělat dvojschodové kroky. Já jedním krokem vystoupím nebo sestoupím o jeden schod. Ty jedním krokem vystoupíš nebo sestoupíš o dva schody*. Spejblův dvojkrok zapíšeme dvojitou šipkou dopředu, nebo dozadu. Doplň zápisy. Hurvínek i Spejbl dostávají stejné příkazy.

Hurvínek	0	→→		→		←←←←		→		←←	
Spejbl	0	⇒⇒		⇒		⇐⇐⇐⇐		⇒		⇐⇐	

Doplň zápis Hurvínkův a vytvoř odpovídající zápis Spejblův.

Hurvínek	0		3		1		−2		−3		−1

Hurvínek a Spejbl stojí oba na schodu 0. Hurvínek udělá krok dolů a Spejbl dvojkrok nahoru. Doplň do obou podbarvených polí dohromady tři šipky tak, aby opět oba stáli na stejném schodu. Hledej více řešení.

Hurvínek	0	←		
Spejbl	0	⇒		

Pravděpodobnost v prostředí Schodů

V návaznosti na hru Fáborky uvedenou v prostředí Krokování ukážeme některé další situace, které pomáhají budovat různá pravděpodobnostní schémata u žáků. Vesměs se jedná o náhodný jev, který je demonstrován nějakým představením v prostředí Schody.

Situace 1. Hráč hodí dvěma kostkami. Podle počtu ok na modré se postaví na příslušný schod, podle počtu na červené udělá příslušný počet kroků nahoru. Žáci předpovídají, kam figurant dojde. Hru lze modifikovat tak, že význam barev červené a modré se vymění.

Ti žáci, kteří poznají, že oba případy vedou ke stejným výsledkům, odhalí komutativitu čísel v sémanticky netriviálním kontextu. Máme-li sčítat dva prsty a tři prsty nebo tři prsty a dva prsty, tak je zřejmé, že výsledek bude týž. Obě čísla jsou snadno zaměnitelná, protože jejich sémantická kvalita je stejná. Když ale stojím na adrese dvě a mám jít tři kroky vpřed, nebo stojím na adrese tři a mám jít dva kroky vpřed, pak pro žáka, který do aritmetiky teprve vstupuje, vůbec není jasné, že výsledek v obou případech bude týž. Je totiž sémantická kvalita výchozího čísla jiná než čísla přidávaného.

Situace 2. Hráč hodí dvěma kostkami. Do boxu [*č* | | *m*] zapíše číslo, které padlo na červené a modré kostce do polí označených *č* a *m*. Pak zjistí, kolik a jakých šipek nutno dopsat do prostředního pole.

Žáci odhalí, že pravděpodobnější jsou ty situace, kde šipek je málo nebo žádná. Dále odhalí, že pravděpodobnost, že šipky budou směřovat doprava, je stejná jako pravděpodobnost, že šipky budou směřovat doleva. Toto intuitivní poznání začíná budovat klastr jednoho z nosných schémat teorie pravděpodobnosti, a to symetrie.

Situace 3. Hráč hodí dvěma kostkami. Do boxu $\boxed{\check{c}}\boxed{\qquad}\boxed{m}$ zapíše číslo, které padlo na červené a modré kostce do polí označených *č* a *m*. Pak zjistí, kolik šipek nutno dopsat do prostředního pole.

V porovnání s předchozí situací zde nezáleží na směru šipky. Po dostatečném počtu pokusů žáci zjistí, že nejpravděpodobnější výsledek je „jedna šipka“. Matematicky vyspělým žákům v sedmém nebo osmém ročníku je možné dát úkol: Vypočítejte pravděpodobnost každého ze šesti možných případů této situace. [Výsledek: P(0) = 1/6 značí, že pravděpodobnost, že nebude dopsána žádná šipka, je 1/6; P (1) = 5/18, P(2) = 2/9, P(3) = 1/6, P(4) = 1/9. P(5) = 1/18]

Situace 4. V klobouku jsou čtyři lístečky, například 1, 1, 1, 3. Žák, který stojí na adrese 4, si dva z lístků vytáhne a postoupí o takový počet schodů, který je roven součtu čísel na lístcích. Opět nutno předpovědět, kam se žák dostane. Variacím souboru lístečků v klobouku lze úlohu mnoha způsoby modifikovat.

Situace 5. V klobouku jsou čtyři kuličky, například 3 červené a 1 modrá. Žák, který stojí na adrese 6 si jednu kuličku vytáhne a hodí kostkou, je-li kulička modrá, sestupuje o tolik schodů, kolik ok padlo na kostce. Jeli červená, tak žák o příslušný počet schodů stoupá. Opět nutno předpovědět, kam se žák dostane.